Problema sui fasci di rette

Considerata l'equazione del fascio di rette

$$F:(k-1)x+(2k+3)y-k+7=0$$

risolvere i seguenti quesiti

a) Determinare le equazioni delle rette generatrici del fascio.
b) Classificare il fascio e nel caso sia proprio determinare le coordinate del suo centro C.
c) Determinare l'equazione della retta del fascio che passa per il punto P(-1;1).
d) Stabilire se esistono rette del fascio la cui distanza dall'origine degli assi cartesiani sia 2.

Soluzione

a) Per trovare le equazioni delle **rette generatrici** si deve scrivere l'equazione del fascio separando i termini che contengono il parametro k dagli altri termini. L'equazione assume la seguente forma:

$$F:k(x+2y-1)+(-x+3y+7)=0$$

Indicando con g_1, g_2 le due rette generatrici, le loro equazioni sono

$$g_1: x+2y-1=0, \qquad g_2:-x+3y+7=0$$

Ricordiamo che delle due rette, la g_1 è quella limite, cioè quella che non si può ottenere per alcun valore del parametro k ma alla quale tende la generica retta del fascio se si attribuiscono al parametro valori tendenti a $+\infty$ o a $-\infty$.

b) Per **classificare il fascio** basta osservare le due rette generatrici: se queste sono incidenti, il fascio è proprio e tutte le rette passano dal punto comune alle due generatrici, se le generatrici sono parallele il fascio è improprio e tutte le sue rette sono parallele alle generatrici. Troviamo i coefficienti angolari delle generatrici.

$m(g_1)=-\frac{1}{2}$, $m(g_2)=\frac{1}{3}$; $m(g_1)\neq m(g_2)\Rightarrow$ le due generatrici sono incidenti ed il fascio è proprio.

Coordinate del centro del fascio

$$C:\begin{cases} x+2y-1=0 \\ -x+3y+7=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{17}{5};-\frac{6}{5}\right)$$

c) Per trovare la retta del fascio richiesta si deve determinare il corrispondente valore del parametro k e per questo scopo basta imporre che le coordinate del punto P verifichino l'equazione del fascio.

$$P(-1;1)\Rightarrow (k-1)(-1)+(2k+3)\cdot 1-k+7=0 \Leftrightarrow 11=0$$

L'uguaglianza ottenuta è assurda, dunque non esiste alcun valore del parametro k per cui la retta passi dal punto P; ciò vuol dire che il punto P appartiene proprio alla retta limite del fascio. Quest'affermazione si può verificare immediatamente provando che le coordinate di P verificano equazione della retta g_1.

d) Utilizzando la formula per la distanza di un punto da una retta determiniamo la distanza dell'origine O(0;0) degli assi dalla generica retta del fascio. Imponendo che la suddetta distanza sia uguale a 2 si ottiene un'equazione; se l'equazione ammette soluzioni i valori di queste saranno quelli da attribuire al parametro per ottenere le rette con la caratteristica indicata.

Ricordiamo che la distanza del punto $P(x_0;y_0)$ dalla retta r di equazione

$$r: ax+by+c=0 \qquad \text{è} \qquad d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Nel caso in esame si ha

$$d=\frac{|-k+7|}{\sqrt{(k-1)^2+(2k+3)^2}}=2 \Leftrightarrow (-k+7)^2=4\left(5k^2+10k+10\right) \Leftrightarrow 19k^2+54k-9=0 \Rightarrow$$

$k_1=-3; k_2=\frac{3}{19}$. Esistono dunque due rette del fascio la cui distanza dall'origine degli assi è 2. Troviamo le loro equazioni.

$k_1=-3 \Rightarrow r_1: 4x+3y-10=0$;

$k_2=\frac{3}{19} \Rightarrow r_2: 16x-63y-130=0$

Riportiamo un grafico con gli elementi geometrici trovati.